অধ্যায় ১

সেট ও ফাংশন (Set and Function)

সেটের ধারণা ও ব্যবহার গণিতে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। এ জন্য অষ্টম ও নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইতে সেট সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে তার বিস্তৃতি হিসেবে আরো আলোচনা করা হলো।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- ▶ সার্বিক সেট, উপসেট, পূরক সেট ও শক্তি সেট গঠন করতে পারবে।
- ▶ বিভিন্ন সেটের সংযোগ, ছেদ ও অন্তর নির্ণয় করতে পারবে।
- ▶ সেট প্রক্রিয়ার ধর্মাবলির যৌক্তিক প্রমাণ করতে পারবে।
- ▶ সমতুল সেট বর্ণনা করতে পারবে এবং এর মাধ্যমে অসীম সেটের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ সেটের সংযোগের শক্তি সেট নির্ণয়ের সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ভেনচিত্র ও উদাহরণের সাহায্যে তা যাচাই করতে পারবে।
- ▶ সেট প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে জীবনভিত্তিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ▶ সেটের সাহায্যে অন্বয় ও ফাংশন এর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবে।
- ▶ এক-এক ফাংশন, সার্বিক ফাংশন ও এক-এক সার্বিক ফাংশন উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ বিপরীত ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ লেখচিত্রের সাহায্যে কোন অন্বয় ফাংশন কিনা তা যাচাই করতে পারবে।
- ▶ অন্বয় ও ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

সেট (Set)

বাস্তব বা চিন্তা জগতের বস্তুর যেকোনো সুনির্ধারিত সংগ্রহকে **সেট** বলা হয়। যেমন, $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ তালিকাটি 10 থেকে বড় নয় এমন স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সেট। সেটকে এভাবে তালিকার সাহায্যে বর্ণনা করাকে **তালিকা পদ্ধতি** বলা হয়। যে সকল বস্তু নিয়ে সেট গঠিত এদের প্রত্যেককে ঐ **সেটের উপাদান** বলা হয়। x, A সেটের উপাদান হলে লেখা হয় $x \in A$ এবং x, A সেটের উপাদান না হলে লেখা হয় $x \notin A$। উপরোক্ত সেট S কে লেখা হয়

$S = \{x : x, 100$ থেকে বড় নয় এমন পূর্ণবর্গ সংখ্যা$\}$। এই পদ্ধতিকে **সেট গঠন পদ্ধতি** বলা হয়।

কাজ: উপরের আলোচনায় ক) S যে সেট তা ব্যাখ্যা কর। খ) S কে অন্যভাবে প্রকাশ কর।

সার্বিক সেট (Universal Set)

মনে করি

$S = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $5x \leq 16\}$

$T = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 20\}$

$P = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $\sqrt{x} \leq 2\}$

এই সেট তিনটির উপাদানসমূহ $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ সেটটির উপাদান নিয়ে গঠিত। U কে S, T, P সেটের জন্য সার্বিক সেট বিবেচনা করা যায়।

সেট সংক্রান্ত কোনো আলোচনায় একটি নির্দিষ্ট সেটকে **সার্বিক সেট** বলা হয়, যদি আলোচনাধীন সকল সেটের উপাদানসমূহ ঐ নির্দিষ্ট সেটের অন্তর্ভুক্ত হয়।

কয়েকটি বিশেষ সংখ্যা সেট

$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ অর্থাৎ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট।

$Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ অর্থাৎ সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট।

$Q = \{x : x = \dfrac{p}{q}$, যেখানে p যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা এবং q যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ অর্থাৎ সকল মূলদ সংখ্যার সেট।

$R = \{x : x$ বাস্তব সংখ্যা$\}$ অর্থাৎ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

উপসেট (Subset)

A ও B সেট হলে A কে B এর **উপসেট** বলা হয় যদি ও কেবল যদি A এর প্রত্যেক উপাদান B এর উপাদান হয় এবং একে $A \subseteq B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। যেমন $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ এর উপসেট। A, B এর উপসেট না হলে $A \not\subseteq B$ লেখা হয়। যেমন $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ এর উপসেট নয়।

উদাহরণ ১. যদি $A = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$, $B = \{0\}$ এবং $X = \{x : x$ পূর্ণ সংখ্যা$\}$ হয়, তবে A, B এবং X এর মধ্যে সম্পর্ক কী?

সমাধান: এখানে $A \subseteq X,\ B \subseteq X,\ B \not\subseteq A$।

২০১৫

> **কাজ:** মনে কর $X = \{x : x$ পূর্ণ সংখ্যা$\}$।
>
> ক) X কে সার্বিক সেট ধরে, X এর তিনটি উপসেট বর্ণনা কর।
>
> খ) X এর দুইটি উপসেট বর্ণনা কর যাদের কোনোটিই অপরটির উপসেট নয়।

ফাঁকা সেট (Empty Set)

অনেক সময় এরূপ সেট বিবেচনা করতে হয় যাতে কোনো উপাদান থাকে না। এরূপ সেটকে **ফাঁকা** সেট বলা হয় এবং $\varnothing$ অথবা $\{\}$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ২. $\{x : x$ বাস্তব সংখ্যা এবং $x^2 < 0\}$ একটি ফাঁকা সেট, কেননা কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক নয়।

উদাহরণ ৩. $F = \{x : x$, ২০১৪ সাল পর্যন্ত ফুটবলের বিশ্বকাপ বিজয়ী আফ্রিকার দেশ$\}$ একটি ফাঁকা সেট, কেননা আফ্রিকার কোন দেশই ২০১৪ সাল পর্যন্ত ফুটবলের বিশ্বকাপ জয় করতে পারেনি।

সেট সমতা (Equality of Sets)

A ও B সেট যদি এমন হয় যে এদের উপাদানগুলো একই তবে A ও B একই সেট এবং তা $A = B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। যেমন $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{1, 2, 2, 3, 4, 4, 4\}$। লক্ষ কর কোনো সেটে একই উপাদান বার বার থাকলেও সেটা একবার থাকার মতই বিবেচনা করা হচ্ছে। $A = B$ হয় যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়। সেট সমতা প্রমাণে এই তথ্য খুবই প্রয়োজনীয়।

প্রকৃত উপসেট (Proper Subset)

A কে B এর **প্রকৃত উপসেট** বলা হয় যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $A \neq B$। অর্থাৎ A এর প্রত্যেক উপাদান B এরও উপাদান এবং B তে অন্তত একটি উপাদান আছে যা A তে নেই। যেমন $A = \{1, 2\},\ B = \{1, 2, 3\}$। A, B এর প্রকৃত উপসেট বুঝাতে $A \subset B$ লেখা হয়।

ক) যেকোনো সেট A এর জন্য $A \subseteq A$। এর কারণ $x \in A \implies x \in A$।

খ) যেকোনো সেট A এর জন্য $\varnothing \subseteq A$। এর কারণ $\varnothing \subseteq A$ না হলে $\varnothing$ তে একটি উপাদান x আছে যা A তে নাই। কিন্তু ইহা কখনই সত্য নয় কারণ $\varnothing$ ফাঁকা সেট। অতএব $\varnothing \subseteq A$। উল্লেখ্য ফাঁকা সেট বা $\varnothing$ যেকোনো সেটের প্রকৃত উপসেট।

সেটের অন্তর (Difference of Sets)

A ও B সেট হলে $A \setminus B$ সেটটি হচ্ছে $\{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$।

$A \setminus B$ কে A **বাদ** B সেট বলা হয় এবং A এর যে সকল উপাদান B তে আছে সেগুলো A থেকে বর্জন করে $A \setminus B$ গঠন করা হয়। $A \setminus B \subseteq A$।

২০১৫

উদাহরণ ৪. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $B = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ হলে $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$।

পূরক সেট (Complementary Set)

সার্বিক সেট U এবং $A \subseteq U$ হলে A এর **পূরক সেট** হচ্ছে $U \setminus A$।

অর্থাৎ $U \setminus A = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$।

সার্বিক সেট থেকে A সেটের উপাদানগুলো বর্জন করলেই A এর পূরক সেট পাওয়া যায় এবং তাকে A' বা A^c লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ৫. যদি সার্বিক সেট U সকল পূর্ণসংখ্যার সেট হয় এবং A সকল ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট হয়, তবে (U সাপেক্ষে) A এর পূরক সেট A' বা $A^c = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

শক্তি সেট (Power Set)

A সেটের সকল উপসেটের সেটকে A এর **শক্তি সেট** বলা হয় এবং $P(A)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। উল্লেখ্য যে $\varnothing \subseteq A$। কাজেই $\varnothing$, $P(A)$ এরও উপাদান।

A সেট	$P(A)$ শক্তি সেট
$A = \varnothing$	$P(A) = \{\varnothing\}$
$A = \{a\}$	$P(A) = \{\varnothing, A\}$
$A = \{a, b\}$	$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$
$A = \{a, b, c\}$	$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

কাজ:

ক) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ হলে নিচের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লেখ:
(১) $A = \{x : x \in U,\ 5x > 37\}$ (২) $B = \{x : x \in U,\ x + 5 < 12\}$
(৩) $C = \{x : x \in U,\ 6 < 2x < 17\}$ (৪) $D = \{x : x \in U, x^2 < 37\}$

খ) $U = \{x : x \in Z^+, 1 \leq x \leq 20\}$ হলে নিচের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লেখ:
(১) $A = \{x : x, 2$ এর গুণিতক$\}$ (২) $B = \{x : x, 5$ এর গুণিতক$\}$
(৩) $C = \{x : x, 10$ এর গুণিতক$\}$
প্রদত্ত তথ্যের আলোকে $C \subset A,\ B \subset A,\ C \subset B$ এর কোনগুলো সত্য বা মিথ্যা বল।

গ) যদি $A = \{a, b, c, d, e\}$ হয়, তবে $P(A)$ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৬. $A = \{a, b\}$ এবং $B = \{b, c\}$ হলে দেখাও যে, $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$।

সমাধান: এখানে, $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $P(B) = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$।

$\therefore\ P(A) \cup P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$।

$A \cup B = \{a, b, c\}, P(A \cup B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$।

সুতরাং, $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$।

কাজ:

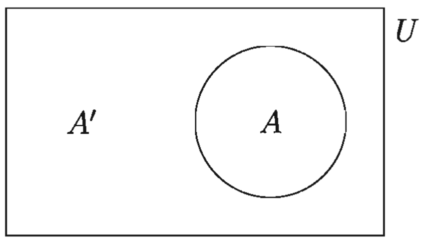
ক) যদি $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}$ এবং $D = \{1, 3\}$ হয়, তবে দেখাও যে, $P(A) = \{A, B, C, D, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$।

খ) যদি $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{2, 5\}$ হয়, তবে দেখাও যে,
(১) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$, (২) $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$।

ভেনচিত্র (Venn Diagram)

সেট সংক্রান্ত তথ্যাদি অনেক সময় চিত্রে প্রকাশ করা সুবিধাজনক। উদ্ভাবক John Venn (১৮৩৪ – ১৯২৩) এর নামানুসারে এরূপ চিত্রকে ভেনচিত্র বলা হয়। গণিত বইতে এ সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

উদাহরণ ৭. সার্বিক সেট U এর সাপেক্ষে A সেট এর পূরক সেট A' এর চিত্ররূপ:



সেটের সংযোগ (Union of Sets)

A ও B সেট হলে এদের **সংযোগ সেট** হচ্ছে $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$।

অর্থাৎ A ও B উভয় সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটই $A \cup B$।

সেটের ছেদ (Intersection of Sets)

A ও B সেট হলে এদের **ছেদ সেট** হচ্ছে $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$।

অর্থাৎ A ও B সেটের সকল সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটই $A \cap B$।

উদাহরণ ৮. সার্বিক সেট $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এর দুইটি উপসেট
$A = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$।

তাহলে $A = \{2, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$।

সুতরাং $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $A \cap B = \{3, 5, 7\}$,

$A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$, $B' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,

$A' \cup B' = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}, A' \cap B' = \{0, 4, 6, 8\}$,

$(A \cap B)' = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}, (A \cup B)' = \{0, 4, 6, 8\}$।

কাজ: উপরের উদাহরণের সেটগুলোকে ভেন চিত্রে দেখাও।

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Set)

যদি A ও B সেট এমন হয় যে $A \cap B = \varnothing$, তবে A ও B কে **নিশ্ছেদ সেট** বলা হয়।

উদাহরণ ৯. $A = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ হলে A ও B সেটদ্বয় নিশ্ছেদ, কেননা $A \cap B = \varnothing$।

উদাহরণ ১০. $A = \{x : x \in R$ এবং $0 \leq x \leq 2\}$ এবং $B = \{x : x \in N$ এবং $0 \leq x \leq 2\}$ হলে $B \subseteq A, A \cup B = A, A \cap B = B = \{1, 2\}$।

উদাহরণ ১১. $A = \{x : x \in R$ এবং $1 \leq x \leq 2\}$ এবং $B = \{x : x \in R$ এবং $0 < x < 1\}$ হলে, $A \cup B = \{x : x \in R$ এবং $0 < x \leq 2\}$ এবং $A \cap B = \varnothing$ অর্থাৎ A ও B নিশ্ছেদ।

কার্তেসীয় গুণজসেট (Cartesian Product Set)

দুইটি সেট A এবং B এর কার্তেসীয় গুণজ $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in B\}$।

উদাহরণ ১২. $A = \{1, 2\},\ B = \{a, b, c\}$ দুইটি সেট। সুতরাং এই দুইটি সেটের কার্তেসীয় গুণজ সেট $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$।

সেট প্রক্রিয়ার কতিপয় প্রতিজ্ঞা

এখানে প্রত্যেক ক্ষেত্রে U সার্বিক সেট এবং A, B, C সেটগুলো U এর উপসেট।

ক) বিনিময় বিধি

(১) $A \cup B = B \cup A$ (২) $A \cap B = B \cap A$

খ) সংযোগ বিধি

(১) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (২) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

গ) বন্টন বিধি

(১) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(২) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ঘ) ডি মরগ্যানের সূত্র

(১) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (২) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ঙ) অন্যান্য সূত্র

(১) $A \cup A = A,\ A \cap A = A$ (২) $A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing$

(৩) $A \cup U = U,\ A \cap U = A$ (৪) $A \subseteq B \implies B' \subseteq A'$

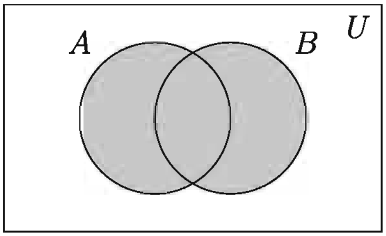
(৫) $A \subseteq B \implies A \cup B = B$ (৬) $A \subseteq B \implies A \cap B = A$ ২০১৫

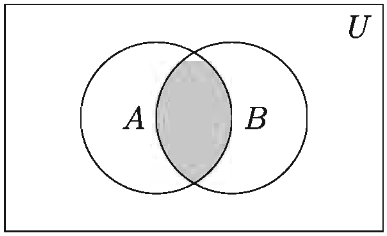
(৭) $A \subseteq A \cup B$ (৮) $A \cap B \subseteq A$

(৯) $A \setminus B = A \cap B'$

বিনিময় বিধির প্রতিজ্ঞা দুইটি যাচাইকরণ

নিচের বামের চিত্রে গাঢ় অংশটুকু $A \cup B$ এবং $B \cup A$ উভয় সেটই নির্দেশ করে। সুতরাং এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে $A \cup B = B \cup A$। নিচের ডানের চিত্রে গাঢ় অংশটুকু $A \cap B$ এবং $B \cap A$ উভয় সেটই নির্দেশ করে। সুতরাং এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে $A \cap B = B \cap A$।





উপরে ভেনচিত্রের সাহায্যে যাচাই করা হয়েছে। এবার সুনির্দিষ্ট উদাহরণ দিয়ে দেখা যাক।

মনে করি $A = \{1, 2, 4\}$ এবং $B = \{2, 3, 5\}$ দুইটি সেট।

তাহলে, $A \cup B = \{1, 2, 4\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$।

আবার, $B \cup A = \{2, 3, 5\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$।

সুতরাং এক্ষেত্রে $A \cup B = B \cup A$।

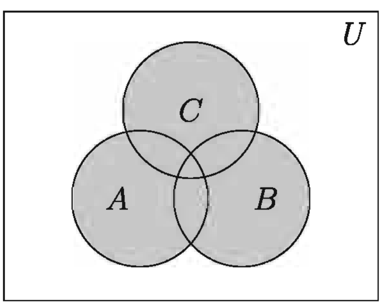
অন্য দিকে, $A \cap B = \{1, 2, 4\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2\}$

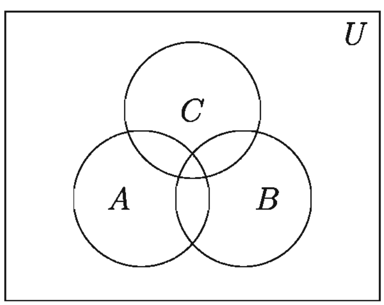
এবং $B \cap A = \{2, 3, 5\} \cap \{1, 2, 4\} = \{2\}$।

সুতরাং এক্ষেত্রে $A \cap B = B \cap A$।

সংযোগ বিধির প্রতিজ্ঞা দুইটির যাচাইকরণ

নিচের বামের চিত্রে গাঢ় অংশটুকু $A \cup (B \cup C)$ এবং $(A \cup B) \cup C$ উভয় সেটই নির্দেশ করে। সুতরাং এক্ষেত্রে $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$। নিচের ডানের চিত্রে গাঢ় অংশটুকু $A \cap (B \cap C)$ এবং $(A \cap B) \cap C$ উভয় সেটই নির্দেশ করে। সুতরাং এক্ষেত্রে $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$।





২০১৫

উপরে ভেনচিত্রের সাহায্যে যাচাই করা হয়েছে। এবার সুনির্দিষ্ট উদাহরণ দিয়ে দেখা যাক।

মনে করি $A=\{a,b,c,d\}, B=\{b,c,f\}$ এবং $C=\{c,d,g\}$।

তাহলে, $B\cup C=\{b,c,f\}\cup\{c,d,g\}=\{b,c,d,f,g\}$

এবং $A\cup(B\cup C)=\{a,b,c,d\}\cup\{b,c,d,f,g\}=\{a,b,c,d,f,g\}$।

আবার, $A\cup B=\{a,b,c,d\}\cup\{b,c,f\}=\{a,b,c,d,f\}$

এবং $(A\cup B)\cup C=\{a,b,c,d,f\}\cup\{c,d,g\}=\{a,b,c,d,f,g\}$।

সুতরাং এক্ষেত্রে $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$।

আবার, $B\cap C=\{b,c,f\}\cap\{c,d,g\}=\{c\}$

এবং $A\cap(B\cap C)=\{a,b,c,d\}\cap\{c\}=\{c\}$।

আবার, $A\cap B=\{a,b,c,d\}\cap\{b,c,f\}=\{b,c\}$

এবং $(A\cap B)\cap C=\{b,c\}\cap\{c,d,g\}=\{c\}$।

সুতরাং এক্ষেত্রে $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$।

কাজ: বন্টন বিধির সূত্রটি যাচাই কর, যেখানে $A=\{1,2,3,6\}, B=\{2,3,4,5\}$ এবং $C=\{3,5,6,7\}$। এই যাচাইকরণ ভেনচিত্রের মাধ্যমেও দেখাও।

দ্রষ্টব্য: সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া দুইটির প্রতিটি অপরটির প্রেক্ষিতে বন্টন নিয়ম মেনে চলে।

প্রতিজ্ঞা ১ (ডি মরগ্যানের সূত্র). সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য

ক) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ খ) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

প্রমাণ: (কেবল প্রথমটির প্রমাণ নিচে দেখানো হয়েছে। পরেরটির প্রমাণ নিজে কর।)

ক) মনে করি, $x\in(A\cup B)'$। তাহলে, $x\notin A\cup B$।

$\implies x\notin A$ এবং $x\notin B \implies x\in A'$ এবং $x\in B' \implies x\in A'\cap B'$

$\therefore\ (A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$।

আবার মনে করি, $x\in A'\cap B'$। তাহলে, $x\in A'$ এবং $x\in B'$।

$\implies x\notin A$ এবং $x\notin B \implies x\notin A\cup B \implies x\in(A\cup B)'$

$\therefore\ A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$।

সুতরাং $(A\cup B)'=A'\cap B'$।

প্রতিজ্ঞা ২. সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য $A\setminus B=A\cap B'$

প্রমাণ: মনে করি, $x \in A \setminus B$। তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin B$।

$\implies x \in A$ এবং $x \in B' \implies x \in A \cap B'$

$\therefore\ A \setminus B \subseteq A \cap B'$।

আবার মনে করি, $x \in A \cap B'$। তাহলে, $x \in A$ এবং $x \in B'$।

$\implies x \in A$ এবং $x \notin B \implies x \in A \setminus B$

$\therefore\ A \cap B' \subseteq A \setminus B$।

সুতরাং, $A \setminus B = A \cap B'$।

প্রতিজ্ঞা ৩. যেকোনো সেট A, B, C এর জন্য

ক) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

খ) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

প্রমাণ:(কেবল প্রথমটির প্রমাণ নিচে দেখানো হয়েছে। পরেরটির প্রমাণ নিজে কর।)

ক) সংজ্ঞানুসারে, $A \times (B \cap C)$

$= \{(x, y) : x \in A,\ y \in B \cap C\}$

$= \{(x, y) : x \in A,\ y \in B$ এবং $y \in C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\}$

$\therefore\ A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

আবার, $(A \times B) \cap (A \times C)$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C\}$

$= \{(x, y) : x \in A,\ y \in B$ এবং $x \in A,\ y \in C\}$

$= \{(x, y) : x \in A,\ y \in B \cap C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times (B \cap C)\}$

$\therefore\ (A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

সুতরাং, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$।

সেট প্রক্রিয়া সংক্রান্ত আরো কতিপয় প্রতিজ্ঞা

ক) A যেকোনো সেট হলে $A \subseteq A$।

খ) ফাঁকা সেট $\varnothing$ যেকোনো সেট A এর উপসেট।

গ) A ও B যেকোনো সেট হলে $A = B$ হবে যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়।

ঘ) যদি $A \subseteq \varnothing$ হয়, তবে $A = \varnothing$।

ঙ) যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$ তবে, $A \subseteq C$।

চ) A ও B যেকোনো সেট হলে, $A \cap B \subseteq A$ এবং $A \cap B \subseteq B$।

ছ) A ও B যেকোনো সেট হলে, $A \subseteq A \cup B$ এবং $B \subseteq A \cup B$।

প্রমাণ: কেবল দুইটি প্রতিজ্ঞার প্রমাণ দেওয়া হয়েছে। অন্যগুলো নিজে কর।

ঘ) দেওয়া আছে, $A \subseteq \varnothing$, আবার আমরা জানি, $\varnothing \subseteq A$। সুতরাং $A = \varnothing$।

ছ) সেট সংযোগের সংজ্ঞানুযায়ী, A সেটের সকল উপাদান $A \cup B$ সেটে থাকে। সুতরাং উপসেটের সংজ্ঞানুযায়ী $A \subseteq A \cup B$। একই যুক্তিতে $B \subseteq A \cup B$।

কাজ: নিচের সকল সেট সার্বিক সেট U এর উপসেট বিবেচনা করতে হবে।

ক) দেখাও যে, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$।

খ) দেখাও যে, $A \subset B$ হবে যদি এবং কেবল যদি নিম্নোক্ত যেকোনো একটি শর্ত খাটে:
(১) $A \cap B = A$ (২) $A \cup B = B$ (৩) $B' \subset A'$
(৪) $A \cap B' = \varnothing$ (৫) $B \cup A' = U$

গ) দেখাও যে,
(১) $A \setminus B \subset A \cup B$ (২) $A' \setminus B' = B \setminus A$
(৩) $A \setminus B \subset A$ (৪) $A \subset B$ হলে, $A \cup (B \setminus A) = B$
(৫) $A \cap B = \varnothing$ হলে, $A \subset B'$ এবং $A \cap B' = A$ এবং $A \cup B' = B'$

ঘ) দেখাও যে,
(১) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (২) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$
(৩) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

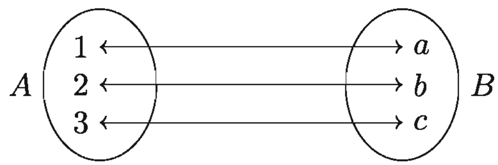
এক-এক মিল (One-One Correspondence)

মনে করি, $A = \{a, b, c\}$ তিনজন লোকের সেট এবং $B = \{30, 40, 50\}$ ঐ তিনজন লোকের বয়সের সেট। অধিকন্তু মনে করি, a এর বয়স 30 বছর, b এর বয়স 40 বছর এবং c এর বয়স 50 বছর। বলা যায় যে, A সেটের সাথে B সেটের এক-এক মিল আছে।

সংজ্ঞা ১ (এক-এক মিল). যদি A সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদান এবং B সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে A সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানের মিল স্থাপন করা যায়, তবে তাকে A ও B এর মধ্যে **এক-এক মিল** বলা হয়। A ও B এর মধ্যে এক-এক মিলকে সাধারণত $A \leftrightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং A সেটের কোনো সদস্য x এর সঙ্গে B সেটের যে সদস্য y এর মিল করা হয়েছে তা $x \leftrightarrow y$ লিখে বর্ণনা করা হয়।

সমতুল সেট (Equivalent Set)

ধরি, $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$ দুইটি সেট। নিচের চিত্রে A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপন করে দেখানো হলো:



সংজ্ঞা ২ (সমতুল সেট). যেকোনো সেট A ও B এর মধ্যে যদি একটি এক-এক মিল $A \leftrightarrow B$ বর্ণনা করা যায়, তবে A ও B কে **সমতুল সেট** বলা হয়। A ও B কে সমতুল বোঝাতে $A \sim B$ লেখা হয়। $A \sim B$ হলে, এদের যেকোনো একটিকে অপরটির সাথে **সমতুল** বলা হয়। লক্ষণীয় যে, যেকোনো সেট A, B ও C এর জন্য

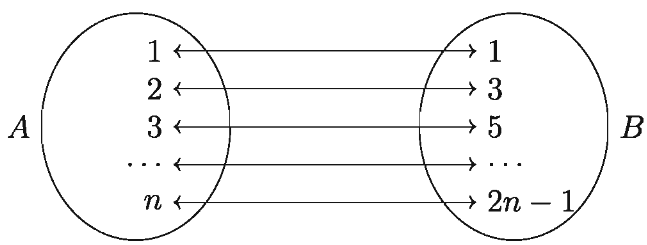
ক) $A \sim A$

খ) $A \sim B$ হলে $B \sim A$

গ) $A \sim B$ এবং $B \sim C$ হলে $A \sim C$।

উদাহরণ ১৩. দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, \cdots, 2n - 1\}$ সেটদ্বয় সমতুল, যেখানে n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

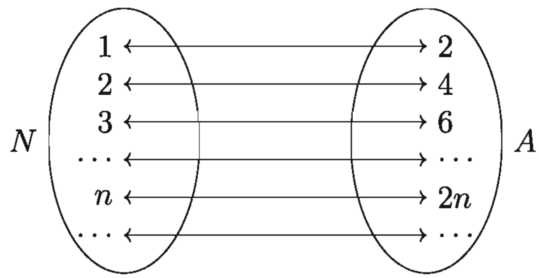
সমাধান: A ও B সমতুল, কারণ সেট দুইটির মধ্যে নিচের মতো একটি এক-এক মিল রয়েছে।



মন্তব্য: উপরে চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $A \leftrightarrow B : k \leftrightarrow 2k-1,\ k \in A$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

উদাহরণ ১৪. দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এবং জোড় সংখ্যার সেট $A = \{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$ সমতুল।

সমাধান: $N = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ ও A সমতুল সেট, কারণ N এবং A এর মধ্যে নিচের চিত্রের মতো একটি এক-এক মিল রয়েছে।

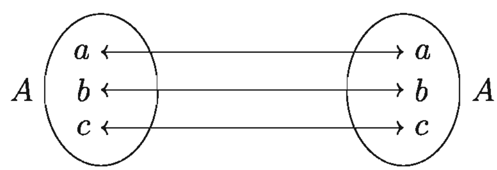


মন্তব্য: উপরে চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $N \leftrightarrow A : n \leftrightarrow 2n, n \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

দ্রষ্টব্য: ফাঁকা সেট $\varnothing$ কে নিজের সমতুল ধরা হয়। অর্থাৎ, $\varnothing \sim \varnothing$।

প্রতিজ্ঞা ৪. প্রত্যেক সেট A তার নিজের সমতুল। অর্থাৎ, $A \sim A$।

প্রমাণ: $A = \varnothing$ হলে, $A \sim A$ ধরা হয়। আর $A \neq \varnothing$ হলে প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে তার নিজেকে মিল করে এক-এক মিল $A \leftrightarrow A : x \leftrightarrow x,\ x \in A$ স্থাপিত হয়। সুতরাং $A \sim A$।



প্রতিজ্ঞা ৫. A ও B সমতুল সেট এবং B ও C সমতুল সেট হলে A ও C সমতুল সেট।

প্রমাণ: যেহেতু $A \sim B$, সুতরাং A এর প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে B এর একটি অনন্য সদস্য y এর মিল করা যায়। আবার যেহেতু $B \sim C$, সুতরাং B এর এই সদস্য y এর সঙ্গে C এর একটি অনন্য সদস্য z এর মিল করা যায়। এখন A এর সদস্য x এর সঙ্গে C এর সদস্য z এর মিল করা হলে, A ও C সেটের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয়। অর্থাৎ, $A \sim C$ হয়।

ব্যবধি (Interval)

a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$ হলে

ক) $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ কে **খোলা ব্যবধি** (open interval) বলে।

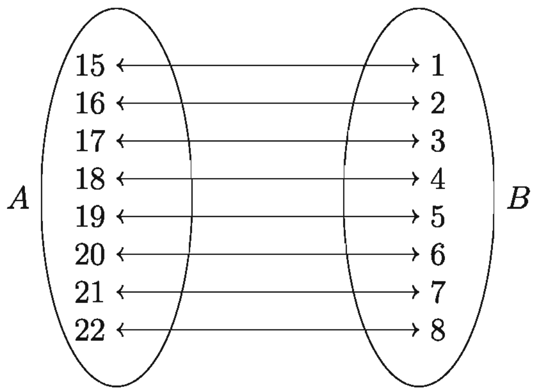
খ) $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ কে **বদ্ধ ব্যবধি** (closed interval) বলে।

২০২৫

গ) $(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ এবং $[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ কে যথাক্রমে খোলা-বদ্ধ ও বদ্ধ-খোলা ব্যবধি বলে।

সান্ত ও অনন্ত সেট (Finite and Infinite Sets)

$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$ সেটটির সদস্যগুলো গণনা করে দেখা যায় যে, A সেটের সদস্য সংখ্যা 8। এই গণনার কাজ A সেটের সঙ্গে $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ সেটের একটি এক-এক মিল স্থাপন করে সম্পন্ন করা হয়। যেমন, নিচের চিত্রে দেখানো হয়েছে।



সংজ্ঞা ৩ (সান্ত ও অনন্ত সেট). গণনা করে যে সকল সেটের সদস্য সংখ্যা নির্ধারণ করা যায়, এদের **সান্ত সেট** বলা হয়। কোনো সেট A সান্ত সেট না হলে, একে **অনন্ত সেট** বলা হয়।

ক) ফাঁকা সেট $\varnothing$ সান্ত সেট, এর সদস্য সংখ্যা 0।

খ) যদি কোনো সেট A এবং $J_m = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ সমতুল হয়, যেখানে $m \in N$, তবে A একটি সান্ত সেট এবং A এর সদস্য সংখ্যা m।

গ) A কোনো সান্ত সেট হলে, A এর সদস্য সংখ্যাকে $n(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

দ্রষ্টব্য:

ক) $J_1 = \{1\},\ J_2 = \{1, 2\}, J_3 = \{1, 2, 3\}$ ইত্যাদি প্রত্যেককেই N এর **সান্ত উপসেট** বলা হয় এবং $n(J_1) = 1,\ n(J_2) = 2,\ n(J_3) = 3$ ইত্যাদি। বাস্তবিক পক্ষে, $J_m \sim J_m$ এবং $n(J_m) = m$।

খ) শুধুমাত্র সান্ত সেটেরই সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায়। $n(A)$ লিখলে বুঝতে হবে A সান্ত সেট।

গ) A ও B সমতুল সেট এবং এদের মধ্যে একটি সেট সান্ত হলে অপর সেটটিও সান্ত হবে এবং $n(A) = n(B)$ হবে।

প্রতিজ্ঞা ৬. যদি A সান্ত সেট হয় এবং B, A এর প্রকৃত উপসেট হয়, তবে B সান্ত সেট এবং $n(B) < n(A)$ হবে।

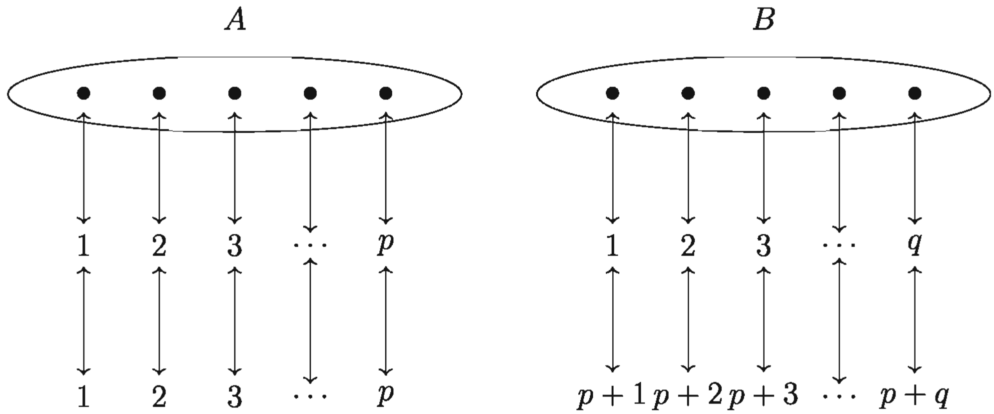
২০১৯

প্রতিজ্ঞা ৭. A অনন্ত সেট হবে যদি ও কেবল যদি A ও A এর একটি প্রকৃত উপসেট সমতুল হয়।

দ্রষ্টব্য: স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N একটি অনন্ত সেট।

সান্ত সেটের উপাদান সংখ্যা

সান্ত সেট A এর উপাদান সংখ্যা $n(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়েছে এবং $n(A)$ নির্ধারণের পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এবার মনে করি, $n(A) = p > 0,\ n(B) = q > 0$ যেখানে $A \cap B = \varnothing$।



উপরের চিত্রে বর্ণিত এক-এক মিল থেকে দেখা যায় যে, $A \cup B \sim J_{p+q}$।

অর্থাৎ, $n(A \cup B) = p + q = n(A) + n(B)$। এ থেকে নিচের প্রতিজ্ঞাটি বলা যায়।

প্রতিজ্ঞা ৮. যদি A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সান্ত সেট হয়, তবে $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$।

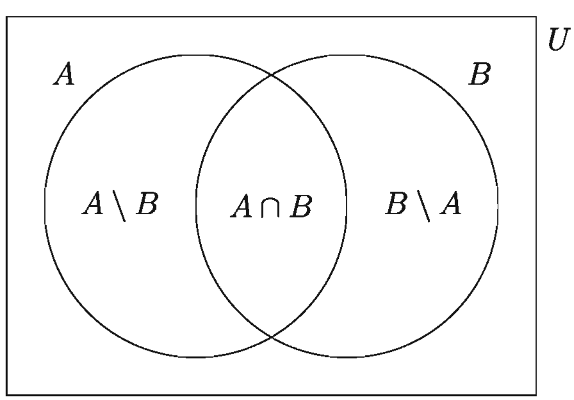
এই প্রতিজ্ঞাকে সম্প্রসারণ করে বলা যায় যে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$।

একইভাবে $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$ ইত্যাদি,

যেখানে A, B, C, D সেটগুলো পরস্পর নিশ্ছেদ সান্ত সেট।

প্রতিজ্ঞা ৯. যেকোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$।

প্রমাণ: এখানে, $A \backslash B,\ A \cap B$ এবং $B \backslash A$ সেট তিনটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]।



ফলে $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ এবং $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

অতএব $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$\therefore\ n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) \cdots\cdots (1)$

$\therefore\ n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B) \cdots\cdots (2)$

$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) \cdots\cdots (3)$

সুতরাং, (1) নং থেকে পাই, $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

এবং (2) নং থেকে পাই, $n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B)$

এখন, $n(A \setminus B)$ এবং $n(B \setminus A)$ (3) এ বসিয়ে পাই,

$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B)$

$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

কাজ:

ক) নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে A ও B এর মধ্যে সম্ভাব্য সকল এক-এক মিল বর্ণনা কর:
(১) $A = \{a, b\},\ \ B = \{1, 2\}$ (২) $A = \{a, b, c\},\ \ B = \{a, b, c\}$

খ) ক নং প্রশ্নে বর্ণিত প্রত্যেক এক-এক মিলকরণের জন্য $F = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ এবং $x \leftrightarrow y$ সেটটি তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর।

গ) মনে করি $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$। $A \times B$ এর একটি উপসেট F বর্ণনা কর যার অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদের সঙ্গে দ্বিতীয় পদের মিল করা হলে, A ও B এর একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয় যেখানে, $a \leftrightarrow 3$।

ঘ) দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ ও $B = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

ঙ) দেখাও যে, $S = \{3^n : n = 0$ অথবা $n \in N\}$ সেটটি N এর সমতুল।

চ) ঠিক উপরের প্রশ্নে বর্ণিত সেট S এর একটি প্রকৃত উপসেট বর্ণনা কর যা S এর সমতুল।

ছ) দেখাও যে, সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $A = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ অনন্ত সেট।

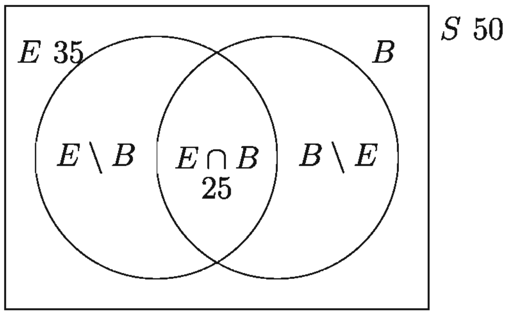
বাস্তব সমস্যা সমাধানে সেট

বাস্তব সমস্যা সমাধানে ভেনচিত্র ব্যবহার করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, প্রতি সেটের উপাদান সংখ্যা ভেনচিত্রে লেখা হবে, তা কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো হলো।

উদাহরণ ১৫. 50 জন লোকের মধ্যে 35 জন ইংরেজি বলতে পারে, 25 জন ইংরেজি ও বাংলা বলতে পারে এবং প্রত্যেকেই দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে। বাংলা বলতে পারে কতজন? কেবল মাত্র বাংলা বলতে পারে কতজন?

২০১৫

সমাধান: মনে করি, সকল লোকের সেট S এবং তাদের মধ্যে যারা ইংরেজি বলতে পারে তাদের সেট E, যারা বাংলা বলতে পারে তাদের সেট B।



তাহলে প্রশ্নানুসারে, $n(S) = 50,\ n(E) = 35,\ n(E \cap B) = 25$ এবং $S = E \cup B$। মনে করি, $n(B) = x$।

তাহলে, $n(S) = n(E \cup B) = n(E) + n(B) - n(E \cap B)$ থেকে পাই,

$50 = 35 + x - 25$ বা, $x = 50 - 35 + 25 = 40$ অর্থাৎ, $n(B) = 40$

$\therefore$ বাংলা বলতে পারে 40 জন।

এখন, যারা কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে, তাদের সেট হচ্ছে $(B \setminus E)$।

মনে করি, $n(B \setminus E) = y$।

যেহেতু $E \cap B$ এবং $(B \setminus E)$ নিশ্ছেদ এবং $B = (E \cap B) \cup (B \setminus E)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]

সুতরাং $n(B) = n(E \cap B) + n(B \setminus E)$।

$\therefore$ $40 = 25 + y$ বা, $y = 40 - 25 = 15$ অর্থাৎ, $n(B \setminus E) = 15$

$\therefore$ কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে 15 জন।

অতএব, বাংলা বলতে পারে 40 জন এবং কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে 15 জন।

উদাহরণ ১৬. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

খ) x নির্ণয় কর।

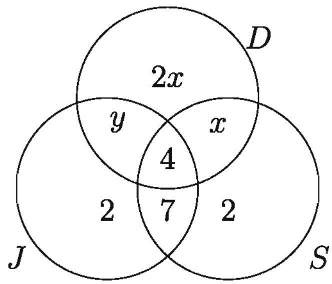
গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

২০২৫

সমাধান:

ক) ধরি, সেট $J =$ যারা দৌড় পছন্দ করে, $S =$ যারা সাঁতার পছন্দ করে, $D =$ যারা নাচ পছন্দ করে। এবার নিচের ভেনচিত্র লক্ষ করি।



খ) ভেনচিত্র হতে $J' =$ {যে সব বালিকা দৌড় পছন্দ করে না}।

অর্থাৎ $n(J') = 35 - 15 = 20$ বা, $2x + x + 2 = 20$ বা, $3x = 18$ বা $x = 6$।

গ) যে সব বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না: $J \cap D \cap S'$।

ঘ) ভেনচিত্রে $n(J \cap D \cap S') = y$ এবং দেওয়া আছে $n(J) = 15$।

$\therefore\ y + 4 + 7 + 2 = 15$ বা $y = 2$।

শুধু 2 জন বালিকা দৌড় এবং নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না।

উদাহরণ ১৭. 24 জন ছাত্রের 18 জন বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে, 12 জন ভলিবল খেলা পছন্দ করে। দেওয়া আছে, $U =$ শ্রেণির ছাত্রদের সেট, $B =$ বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট, $V =$ ভলিবল খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রদের সেট। মনে কর $n(B \cap V) = x$ এবং ভেনচিত্রে নিচের তথ্যগুলো ব্যাখ্যা কর:

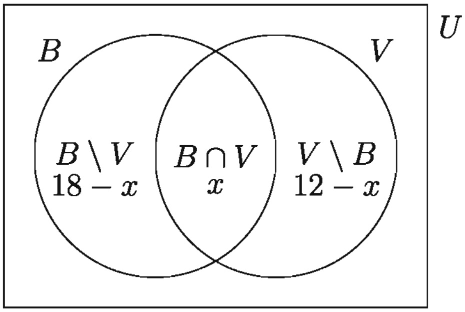
ক) $B \cup V$ সেটের বর্ণনা দাও এবং $n(B \cup V)$ কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) x এর সম্ভাব্য ন্যূনতম মান নির্ণয় কর।

গ) x এর সম্ভাব্য বৃহত্তম মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $B \cup V$ হলো এমন সব ছাত্রের সেট যারা বাস্কেটবল বা ভলিবল খেলা পছন্দ করে।



$n(B \cup V) = (18 - x) + x + (12 - x) = 30 - x$

খ) x বা $n(B \cap V)$ ক্ষুদ্রতম যখন $B \cup V = U$

অর্থাৎ $n(B \cup V) = n(U)$ বা $30 - x = 24$ বা $x = 6$

$\therefore$ সম্ভাব্য ক্ষুদ্রতম মান $x = 6$।

গ) $n(B \cap V)$ বৃহত্তম যখন $V \subset B$

তখন, $n(B \cap V) = n(V)$ বা $x = 12$

$\therefore$ সম্ভাব্য বৃহত্তম মান $x = 12$।

কাজ:

ক) কোনো শ্রেণির 30 জন ছাত্রের 20 জন ফুটবল এবং 15 জন দাবা পছন্দ করে। প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার অন্তত যেকোনো একটি খেলা পছন্দ করে। কতজন ছাত্র দুইটি খেলাই পছন্দ করে?

খ) কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 50 জন বাংলা, 20 জন ইংরেজি এবং 10 জন বাংলা ও ইংরেজি বলতে পারে। দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষা কতজন বলতে পারে?

গ) ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের আধুনিক ভাষা ইনস্টিটিউটের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42 জন ফ্রেঞ্চ, 30 জন জার্মান, 28 জন স্প্যানিশ নিয়েছে। 10 জন নিয়েছে ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8 জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফ্রেঞ্চ, 3 জন তিনটি ভাষাই নিয়েছে।

(১) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি?

(২) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে?

(৩) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে?

ঘ) কোনো স্কুলের নবম শ্রেণির বিজ্ঞান শাখার 50 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 29 জন জীববিজ্ঞান, 24 জন উচ্চতর গণিত এবং 11 জন জীববিজ্ঞান ও উচ্চতর গণিত উভয় বিষয় নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী জীববিজ্ঞান বা উচ্চতর গণিত বিষয় দুইটির কোনটিই নেয়নি?

অনুশীলনী ১.১

১. (i) কোন সেটের সদস্য সংখ্যা $2n$ হলে, এর উপসেটের সংখ্যা হবে 4^n।

(ii) সকল মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \left\{ \frac{p}{q} :\ p, q \in Z \right\}$।

(iii) $a, b \in R; (a, b) = \{x : x \in R$ এবং $a < x < b\}$।

উপরের উক্তিগুলোর আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য $A_n = \{n, 2n, 3n, \cdots\}$ হলে (২ - ৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২. $A_1 \cap A_2$ এর সমান নিচের কোনটি?

ক) A_1 খ) A_2 গ) A_3 ঘ) A_4

৩. নিচের কোনটি $A_3 \cap A_6$ এর সমান?

ক) A_2 খ) A_3 গ) A_4 ঘ) A_6

৪. $A_2 \cap A_3$ এর পরিবর্তে নিচের কোনটি লেখা যায়?

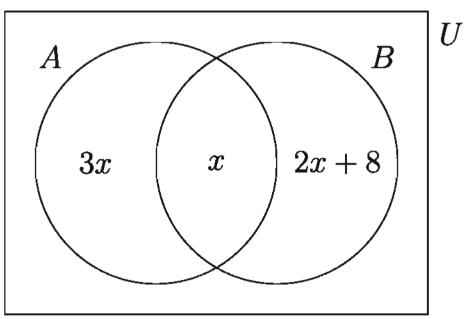
ক) A_3 খ) A_4 গ) A_5 ঘ) A_6

৫. দেওয়া আছে $U = \{x : 1 \leq x \leq 20,\ x \in Z\}$, $A = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$। নিম্নের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লিপিবদ্ধ কর:

ক) A খ) B

গ) $C = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ ঘ) $D = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

৬. ভেনচিত্রে A ও B সেটের উপাদানগুলোর সংখ্যা দেখানো হয়েছে। যদি $n(A) = n(B)$ হয়, তবে নির্ণয় কর ক) x এর মান খ) $n(A \cup B)$ গ) $n(B \setminus A)$।



৭. যদি $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : x \geq 5\} \subset U$ এবং $B = \{x : 5x < 12\} \subset U$ তবে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।

৮. যদি $U = \{x : x$ জোড় পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : 3x \geq 25\} \subset U$ এবং $B = \{x : 5x < 12\} \subset U$ হয়, তাহলে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cap B')$ এর মান নির্ণয় কর।

২০১৯

৯. দেখাও যে, ক) $A \setminus A = \varnothing$ খ) $A \setminus (A \setminus A) = A$।

১০. দেখাও যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$।

১১. যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subset (B \times D)$।

১২. দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

১৩. দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \cdots\}$ একটি অনন্ত সেট।

১৪. প্রমাণ কর যে, $n(A) = p,\ n(B) = q$ এবং $A \cap B = \varnothing$ হলে, $n(A \cup B) = p + q$।

১৫. প্রমাণ কর যে, A, B, C সান্ত সেট হলে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$।

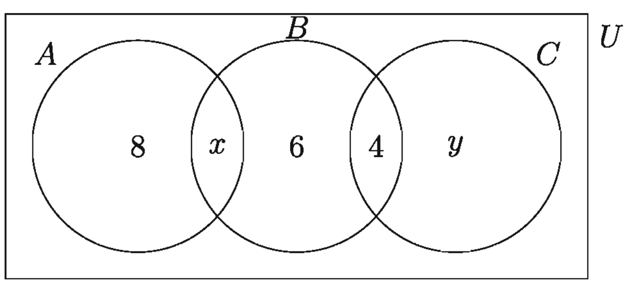
১৬. $A = \{a, b, x\}$ এবং $B = \{c, y\}$ সার্বিক সেট $U = \{a, b, c, x, y, z\}$ এর উপসেট হলে,

ক) যাচাই কর যে, $(i)\ A \subset B'$ $(ii)\ A \cup B' = B'$ $(iii)\ A' \cap B = B$।

খ) নির্ণয় কর: $(A \cap B) \cup (A \cap B')$।

১৭. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি?

১৮. নিচের ভেনচিত্রে সার্বিক সেট $U = A \cup B \cup C$।



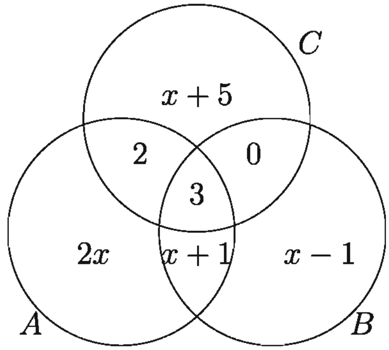
ক) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

খ) যদি $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$ হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর।

গ) $n(U)$ এর মান নির্ণয় কর।

১৯. নিচের ভেনচিত্রে $U = A \cup B \cup C$ এবং $n(U) = 50$।

২০১৮



ক) x এর মান নির্ণয় কর।

খ) $n(B \cap C')$ এবং $n(A' \cap B)$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) $n(A \cap B \cap C')$ এর মান নির্ণয় কর।

২০. তিনটি সেট A, B এবং C এমনভাবে দেওয়া আছে যেন, $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ এবং $C \subset B$। ভেনচিত্র অঙ্কন করে সেটগুলোর ব্যাখ্যা দাও।

২১. দেওয়া আছে $A = \{x : 2 < x \leq 5,\ x \in R\}$, $B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$। নিম্নের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

ক) $A \cap B$ খ) $A' \cap B'$ গ) $A' \cup B$

২২. দেওয়া আছে $U = \{x : x < 10, x \in R\}$, $A = \{x : 1 < x \leq 4\}$ এবং $B = \{x : 3 \leq x < 6\}$। নিচের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

ক) $A \cap B$ খ) $A' \cap B$ গ) $A \cap B'$ ঘ) $A' \cap B'$

২৩. নিম্নে প্রতিক্ষেত্রে A ও B সেট দেওয়া আছে, $A \cup B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$।

ক) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{-3, 0, 3\}$

খ) $A = \{x : x \in N,\ x < 10$ এবং $x, 2$ এর গুণিতক$\}$ এবং $B = \{x : x \in N,\ x < 10$ এবং $x, 3$ এর গুণিতক$\}$

২৪. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে $A \cap B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে, $(A \cap B) \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$।

ক) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$ খ) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, x, c, y\}$

২৫. বেগম রোকেয়া কলেজের ছাত্রীদের মধ্যে বিচিত্রা, সন্ধানী ও পূর্বাণী পত্রিকার পাঠ্যাভ্যাস সম্পর্কে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল 60% ছাত্রী বিচিত্রা, 50% ছাত্রী সন্ধানী, 50% ছাত্রী পূর্বাণী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও সন্ধানী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও পূর্বাণী, 20% ছাত্রী সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং 10% ছাত্রী তিনটি পত্রিকাই পড়ে।

ক) শতকরা কতজন ছাত্রী উক্ত পত্রিকা তিনটির কোনটিই পড়ে না?

খ) শতকরা কতজন ছাত্রী উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুইটি পড়ে?

২০১৯

২৬. $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a+b)x + ab = 0\}$, $B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$

ক) A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$।

গ) প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$।

২৭. একটি শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন দাবা খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও দাবা এবং 12 জন ফুটবল ও দাবা খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোনো খেলায় পারদর্শী নয়।

ক) উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী এমন ছাত্রদের সেট এবং কোনো খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট ভেনচিত্রে দেখাও।

খ) কতজন ছাত্র উল্লিখিত তিনটি খেলায়ই পারদর্শী তা নির্ণয় কর।

গ) কতজন ছাত্র কেবলমাত্র একটি খেলায় পারদর্শী? কতজন অন্তত দুইটি খেলায় পারদর্শী?

২৮. $P(\varnothing)$, $P(\{\varnothing\})$ সেট নির্ণয় কর।

২৯. এক গ্রামে এক মিস্ত্রী ছিল। সে তাদের ঘর তৈরি করতো যারা নিজেরা নিজেদের ঘর তৈরি করতো না। মিস্ত্রীর ঘর কে তৈরি করতো?

৩০. $A = \{x : x \notin A\}$। সেট A নিয়ে বিস্তৃত আলোচনা কর।

ফাংশন (Function)

অন্বয় (Relation)

অনেক সময় আমরা সেট X এর উপাদানগুলোর মধ্যে অথবা সেট X ও সেট Y এর উপাদানগুলোর মধ্যে বিভিন্ন সম্পর্ক বিবেচনা করি। যেমন, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এ বড়-ছোট সম্পর্ক, কোনো পরিবারে ভাই-বোন সম্পর্ক, তোমার শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সঙ্গে সর্বশেষ জন্মদিনে তাদের বয়সের সম্পর্ক। এ প্রসঙ্গে নবম-দশম শ্রেণির গণিত বই দ্রষ্টব্য।

উদাহরণ ১৮. মনে করি $A = \{0, 1, 2, 3\}$ একটি সেট। A সেটের উপাদানগুলোর মধ্যে $x < y$ সম্পর্কটিকে $A \times A$ এর উপসেট $S = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2)(1,3), (2,3)\}$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে S সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড় গুলোর (প্রথম অংশক) $<$ (দ্বিতীয় অংশক)। এক্ষেত্রে S হলো A সেটে বর্ণিত $<$ অন্বয়।

উদাহরণ ১৯. মনে করি কোনো পরিবারে a পিতা, b মাতা, c বড় ছেলে, d ছোট ছেলে, e মেয়ে, f বড় ছেলের স্ত্রী। পরিবারের সদস্যদের সেটকে F ধরে আমরা পাই $F = \{a, b, c, d, e, f\}$। F সেটে ভাই সম্পর্ক অর্থাৎ x হলো y এর ভাই সম্পর্কটিকে $B = \{(c,d), (c,e), (d,c), (d,e)\}$ দ্বারা বর্ণনা

করা যায়, যেখানে B সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশক হলো দ্বিতীয় অংশকের ভাই। B সেট হলো F সেটে ভাই অন্বয়।

সংজ্ঞা ৪ (অন্বয়). X ও Y সেট হলে এদের কার্তেসীয় গুণজ সেট $X \times Y$ এর যেকোনো উপসেটকে X হতে Y এ একটি অন্বয় বলা হয়। অর্থাৎ $R \subseteq X \times Y$ হলো X হতে Y এ বর্ণিত অন্বয়।

কাজ: Z সেটে "x হলো y এর বর্গ" অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেট রূপে বর্ণনা কর।

ফাংশন (Function)

সেটের মতো ফাংশনের ধারণাও গণিতে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। ব্যবহারিক প্রয়োজনে দুইটি চলক অথবা দুইটি সেটের মধ্যে সম্পর্ক বিবেচনা করা হয়।

উদাহরণ ২০. বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও পরিসীমার মধ্যে যে সম্পর্ক তাকে $p = 2\pi r$ লিখে প্রকাশ করা হয় যেখানে r চলক বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও p চলক বৃত্তের পরিসীমা নির্দেশ করে। এখানে r এর প্রত্যেক সম্ভাব্য মানের জন্য p এর একটি ও কেবল একটি মান নির্দিষ্ট হয়। আমরা বলি, p চলক r চলকের একটি ফাংশন এবং লিখি $p = f(r)$, যেখানে $f(r) = 2\pi r$।

এই ফাংশনীয় সম্পর্কটি দ্বারা r এর ব্যাপ্তি সেট X থেকে p এর ব্যাপ্তি সেট Y এ একটি ফাংশন সংজ্ঞায়িত হয়েছে বলেও ধরা হয়। এই ফাংশনকে X থেকে Y তে বর্ণিত অন্বয় $\{(r, p) : r \in X$ এবং $p \in Y$ ও $p = 2\pi r\}$ রূপেও বিবেচনা করা হয়। অন্বয়ের ধারণা নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইএ ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

সংজ্ঞা ৫ (ফাংশন). যদি X ও Y সেট হয় এবং কোনো নিয়মের অধীনে X সেটের প্রত্যেক উপাদানের সঙ্গে Y সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানকে সংশ্লিষ্ট করা হয় তবে ঐ নিয়মকে X থেকে Y এ বর্ণিত একটি **ফাংশন** বলা হয়। এরূপ ফাংশনকে f, g, F, G ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সংজ্ঞা ৬ (ডোমেন ও কোডোমেন). যদি X সেট হতে Y সেটে f একটি ফাংশন হয়, তবে তাকে $f : X \to Y$ লিখে প্রকাশ করা হয়। X সেটকে $f : X \to Y$ ফাংশনের **ডোমেন (domain)** এবং Y সেটকে এর **কোডোমেন (codomain)** বলা হয়।

সংজ্ঞা ৭ (প্রতিবিম্ব ও প্রাক প্রতিবিম্ব). যদি $f : X \to Y$ ফাংশনের অধীনে $x \in X$ এর সাথে $y \in Y$ সংশ্লিষ্ট হয়, তবে এই ফাংশনের অধীনে y কে x এর **প্রতিবিম্ব বা ইমেজ (image)** এবং x কে y এর **প্রাক প্রতিবিম্ব (preimage)** বলা হয় এবং $y = f(x)$ লিখে তা প্রকাশ করা হয়।

সংজ্ঞা ৮ (রেঞ্জ). $f : X \to Y$ ফাংশনের অধীনে Y এর যে সকল উপাদান X এর কোনো উপাদানের ইমেজ হয়, এদের সেটকে f ফাংশনের **রেঞ্জ (range)** বলা হয় এবং "রেঞ্জ f" দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ $f = \{y : y = f(x)$ যেখানে $x \in X\} = \{f(x) : x \in X\}$। লক্ষণীয় যে রেঞ্জ f কোডোমেন Y এর উপসেট।

২০১৯

ফাংশনকে বিভিন্নভাবে বর্ণনা করা যায়। নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ কর।

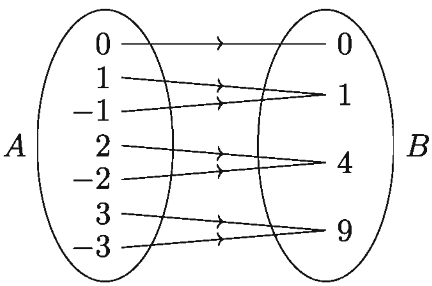
উদাহরণ ২১. $f : x \to 2x + 1,\ x \in Z$; পূর্ণ সংখ্যার সেট Z হতে Z এ একটি ফাংশন বর্ণনা করে। এই ফাংশনের অধীনে পূর্ণসংখ্যা x এর প্রতিবিম্ব $y = f(x) = 2x + 1$; ফাংশনটির ডোমেন, ডোম $f = Z$ এবং ফাংশনটির রেঞ্জ, রেঞ্জ $f = \{y : y = 2x + 1,\ x \in Z\}$ সকল বিজোড় পূর্ণসংখ্যার সেট।

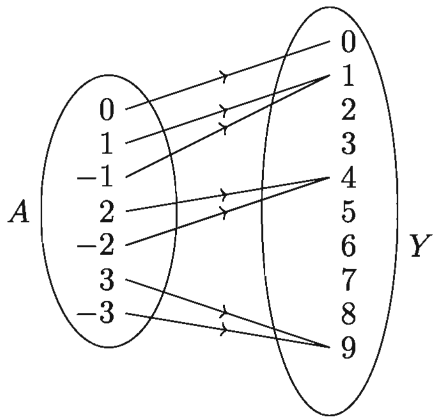
উদাহরণ ২২. ক্রমজোড়ের সেট $F = \{(0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9)\}$ একটি ফাংশন বর্ণনা করে, যার ডোমেন হলো F এর অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেট এবং রেঞ্জ হলো F এর অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেট।

অর্থাৎ ডোম $F = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{0, 1, 4, 9\}$

একটু লক্ষ করলে এক্ষেত্রে দেখা যাবে যে F এর অধীনে $x \in$ ডোম F এর প্রতিবিম্ব $F(x) = x^2$। উল্লেখ্য যে, একটি ক্রমজোড়ের সেট কেবল তখনই একটি ফাংশন বর্ণনা করে যখন ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম অংশক ভিন্ন হয়।

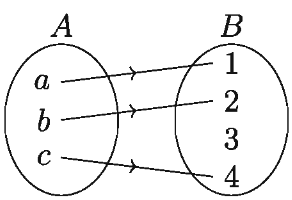
উদাহরণ ২৩. নিচে বর্ণিত ফাংশন F এর ডোমেনকে A ও রেঞ্জকে B ধরে ফাংশনটিকে চিত্র দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে A এর প্রত্যেক বিন্দু থেকে একটি ও কেবল একটি তীর চিহ্নিত রেখা আরম্ভ করে B সেটের একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে শেষ হয়েছে (বামের চিত্র)। উল্লেখ্য যে, ফাংশনের কোডোমেন হিসেবে একটি সেট Y (যার উপসেট B) নিয়েও ফাংশনটিকে চিত্রিত করা যায় (ডানের চিত্র)।

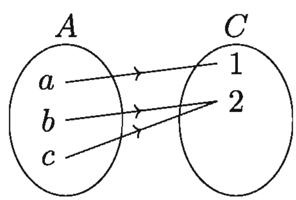


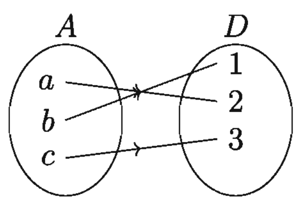


বিপরীত ফাংশন (Inverse Function)

নিচের তিনটি চিত্রে তিনটি ফাংশন বর্ণনা করা হয়েছে।







ক) উপরের বামের চিত্রের ফাংশনটির অধীনে $a \to 1, b \to 2, c \to 4$। এই ফাংশনটি এক-এক কিন্তু সার্বিক নয় কেননা 3 এর কোনো প্রাক প্রতিবিম্ব নেই।

২০২৫

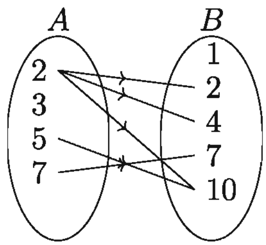
খ) উপরের মাঝের চিত্রের ফাংশনটির অধীনে $a \to 1, b \to 2, c \to 2$। এই ফাংশনটি সার্বিক কিন্তু এক-এক নয় কেননা b ও c এর প্রতিবিম্ব 2।

গ) উপরের ডানের চিত্রের ফাংশনটির অধীনে $a \to 2, b \to 1, c \to 3$। এই ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক। শেষোক্ত ক্ষেত্রে কোডোমেন D এর প্রত্যেক উপাদানের জন্য ডোমেন A এর একটি ও কেবল একটি উপাদান নির্দিষ্ট হয়েছে। ফলে, D হতে A তে একটি ফাংশন বর্ণিত হয়েছে, যেই ফাংশনকে প্রদত্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা ৯ (বিপরীত ফাংশন). মনে করি, $f : A \to B$ একটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশন। একটি ফাংশন $g : B \to A$ বর্ণিত হয় যেখানে প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য $g(b) = a$ যদি ও কেবল যদি $f(a) = b$ হয়। এই ফাংশন g কে f এর **বিপরীত ফাংশন** বলা হয় এবং f^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয় অর্থাৎ $g = f^{-1}$।

উপরের ডানের চিত্রে বর্ণিত ফাংশনটি f হলে $f^{-1} : D \to A$ এবং $f^{-1}(1) = b$, $f^{-1}(2) = a$, $f^{-1}(3) = c$। উপরের অন্য দুইটি চিত্রে বর্ণিত ফাংশন দুইটির বিপরীত ফাংশন সম্ভব নয়।

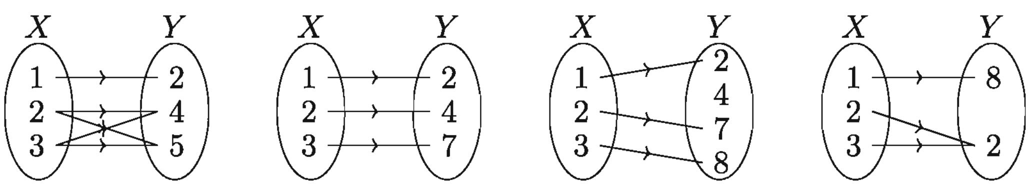
উদাহরণ ২৪. মনে করি, $A = \{2, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{1, 2, 4, 7, 10\}$। A এর যে যে সদস্য দ্বারা B এর যে যে সদস্য বিভাজ্য হয় এদেরকে নিচের চিত্রে তীর চিহ্নিত করে দেখানো হলো:



এখানে $D = \{(2,2), (2,4), (2,10), (5,10), (7,7)\}$ এরূপ অন্বিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট, যা দ্বারা এই বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়। D সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশ A এর সদস্য ও দ্বিতীয় অংশ B এর সদস্য যেখানে প্রথম অংশ দ্বারা দ্বিতীয় অংশ বিভাজ্য। অর্থাৎ, $D \subset A \times B$ এবং $D = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$, এখানে D সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়।

উদাহরণ ২৫. বাস্তব সংখ্যার ক্রমজোড়ের সেট $L = \{(x, y) : x \in R,\ y \in R$ এবং $x < y\}$ বিবেচনা করি। দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b এর জন্য $a < b$ যদি ও কেবল যদি $(a, b) \in L$ হয়। সুতরাং L সেট দ্বারা বাস্তব সংখ্যার ছোট-বড় সম্পর্ক বর্ণিত হয়।

উদাহরণ ২৬. নিচের কোন অন্বয়টি (relation) ফাংশন নয়? যুক্তি দাও।



সমাধান: উপরের বাম পাশের সম্পর্কটি ফাংশন নয় কারণ $2 \to 4$, $2 \to 5$ এবং $3 \to 4$, $3 \to 5$। বাকি তিনটি সম্পর্কই ফাংশন।

উদাহরণ ২৭. $f : x \to 2x^2 + 1$ ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর যেখানে ডোমেন $X = \{1, 2, 3\}$।

সমাধান: $f(x) = 2x^2 + 1$ যেখানে $x \in X$।

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$, $f(2) = 2(2)^2 + 1 = 9$ এবং $f(3) = 2(3)^2 + 1 = 19$।

$\therefore \{1, 2, 3\}$ এর রেঞ্জ সেট $= \{3, 9, 19\}$।

উদাহরণ ২৮. $f : x \to mx + c$ ফাংশনের জন্য 2 এবং 4 এর প্রতিবিম্ব যথাক্রমে 7 ও -1। তাহলে নির্ণয় কর:

ক) m এবং c এর মান।

খ) f এর অধীনে 5 এর প্রতিবিম্ব।

গ) f এর অধীনে 3 এর প্রাক প্রতিবিম্ব।

সমাধান:

ক) $f(x) = mx + c$ এ দেওয়া আছে

$f : 2 \to 7$ অর্থাৎ $f(2) = 7$ বা, $2m + c = 7 \cdots\cdots (1)$

$f : 4 \to -1$ অর্থাৎ $f(4) = -1$ বা, $4m + c = -1 \cdots\cdots (2)$

(1) ও (2) থেকে পাই $m = -4$ এবং $c = 15$

খ) f এর অধীনে 5 এর প্রতিবিম্ব $f(5) = -4 \times 5 + 15 = -5$

গ) 3 এর প্রাক প্রতিবিম্ব x হলে $f(x) = 3$ অর্থাৎ $-4x + 15 = 3$ বা $x = 3$

> **কাজ:** $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি কী ফাংশন? এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। সম্ভব হলে F এর জন্য একটি সূত্র নির্ণয় কর।

মন্তব্য: কোনো ফাংশন F এর ডোমেন এবং ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য x এর অনন্য প্রতিবিম্ব $F(x)$ নির্দিষ্ট করা হলেই ফাংশনটি নির্ধারিত হয়। অনেক সময় ডোমেন উহ্য রাখা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে ডোমেন হিসেবে ঐ সেটকে গ্রহণ করা হয়, যার প্রত্যেক উপাদানের জন্য $F(x)$ নির্ধারিত থাকে।

উদাহরণ ২৯. $F(x) = \sqrt{1 - x}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। $F(-3)$, $F(0)$, $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $F(1)$, $F(2)$ এর মধ্যে যেগুলো সংজ্ঞায়িত সেগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান: $F(x) = \sqrt{1 - x} \in R$ যদি ও কেবল যদি $1 - x \geq 0$ বা $1 \geq x$ অর্থাৎ, $x \leq 1$

সুতরাং ডোম $F = \{x : x \in R$ এবং $x \leq 1\}$

এখানে $F(-3) = \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{4} = 2$

$$F(0) = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$$

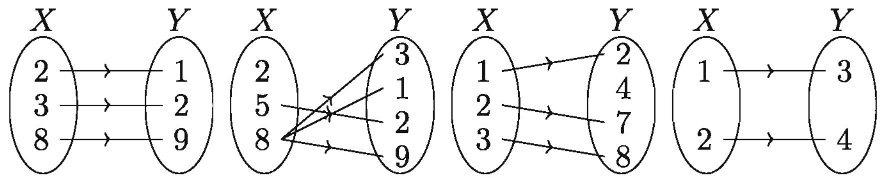
$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F(1) = \sqrt{1-1} = 0$$

$F(2)$ সংজ্ঞায়িত নয়, কেননা $2 \notin$ ডোম F।

কাজ:

ক) নিচের কোন অন্বয়টি ফাংশন নয়? যুক্তি দাও।



খ) $f : x \to 4x + 2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন যার ডোমেন $D = \{-1, 3, 5\}$। ফাংশনটির রেঞ্জ সেট নির্ণয় কর।

গ) প্রদত্ত S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং কোনগুলো ফাংশন তা নির্ধারণ কর। ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর, যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$।

(১) $S = \{(x, y) : x \in A,\ y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

(২) $S = \{(x, y) : x \in A,\ y \in A$ এবং $x - y = 1\}$

(৩) $S = \{(x, y) : x \in A,\ y \in A$ এবং $y = x^2\}$

(৪) $S = \{(x, y) : x \in A,\ y \in A$ এবং $y^2 = x\}$

ঘ) $F(x) = 2x - 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(১) $F(-2), F(0)$, এবং $F(2)$ নির্ণয় কর।

(২) $F\left(\frac{a+1}{2}\right)$ নির্ণয় কর, যেখানে $a \in R$।

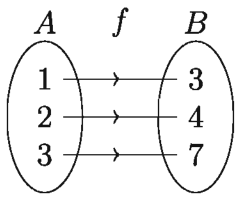
(৩) $F(x) = 5$ হলে x নির্ণয় কর।

(৪) $F(x) = y$ হলে x নির্ণয় কর, যেখানে $y \in R$।

এক-এক ফাংশন (One-One Function)

২০১৬

নিচের ভেনচিত্রে f ফাংশনের অধীনে ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিবিম্ব সর্বদা ভিন্ন।



সংজ্ঞা ১০ (এক-এক ফাংশন). যদি কোন ফাংশন f এর অধীনে এর ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিবিম্ব সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে **এক-এক (one-one) ফাংশন** বলা হয়। অর্থাৎ $x_1, x_2 \in$ ডোম f এবং $x_1 \neq x_2$ হলে $f(x_1) \neq f(x_2)$।

উপরের সংজ্ঞা থেকে দেখা যায়, একটি ফাংশন $f : A \to B$ এক-এক ফাংশন হবে, যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয় যেখানে $x_1, x_2 \in A$।

উদাহরণ ৩০. $f(x) = 3x + 5,\ x \in R$ ফাংশনটি কি এক-এক ফাংশন?

সমাধান: মনে করি $a, b \in R$ এবং $f(a) = f(b)$।

তাহলে $3a + 5 = 3b + 5$ বা, $3a = 3b$ বা, $a = b$।

সুতরাং f ফাংশনটি এক-এক।

উদাহরণ ৩১. দেখাও যে, $F : R \to R,\ F(x) = x^2$ ফাংশনটি এক-এক নয়।

সমাধান: $x_1 = -1, x_2 = 1$ নিয়ে দেখি যে, $x_1 \in$ ডোম $F, x_2 \in$ ডোম F এবং $x_1 \neq x_2$।

কিন্তু $F(x_1) = F(-1) = (-1)^2 = 1, F(x_2) = F(1) = (1)^2 = 1$।

অর্থাৎ $F(x_1) = F(x_2)$, $\therefore\ F$ এক-এক নয়।

দ্রষ্টব্য: কোনো ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ফাংশন নাও হতে পারে।

উদাহরণ ৩২. $f(x) = \dfrac{x}{x-2},\ x \neq 2$ বর্ণিত ফাংশনের জন্য নির্ণয় কর:

ক) $f(5)$ খ) $f^{-1}(2)$

সমাধান:

ক) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}, x \neq 2$

$$\therefore\ f(5) = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

খ) ধরি, $a = f^{-1}(2)$ তাহলে $f(a) = 2$

$$\implies \frac{a}{a-2} = 2 \implies a = 2a - 4 \implies a = 4$$

$$\therefore\ f^{-1}(2) = 4$$

উদাহরণ ৩৩. $f(x) = 3x + 1,\ 0 \leq x \leq 2$ ২০১৮

ক) f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে f এক-এক ফাংশন।

গ) f^{-1} নির্ণয় কর এবং f ও f^{-1} এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক) $f(x) = 3x + 1,\ 0 \leq x \leq 2$ হতে পাই প্রান্ত বিন্দুদ্বয় $(0, 1)$ এবং $(2, 7)$

$\therefore$ রেঞ্জ $f : R = \{y : 1 \leq y \leq 7\}$

খ) যেহেতু প্রত্যেক $y \in R$ এর জন্য একমাত্র $x \in \{0 \leq x \leq 2\}$ এর ইমেজ y দেখানো হয়েছে। সুতরাং f এক-এক ফাংশন।

গ) ধরি, $y = f(x)$, x এর ইমেজ।

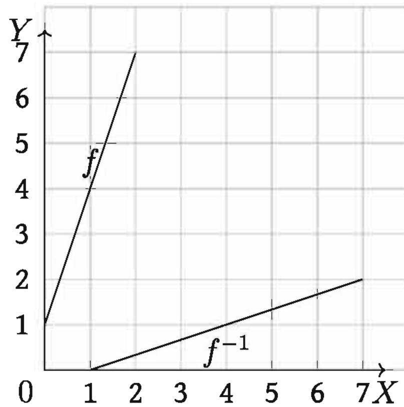
তাহলে, $y = 3x + 1 \implies x = \frac{1}{3}(y-1)$ যা লেখচিত্রে দেখানো হয়েছে।

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = \frac{1}{3}(y-1)$

বা, $f^{-1} : y \to \frac{1}{3}(y-1)$ যা চিত্রে দেখানো হয়েছে।

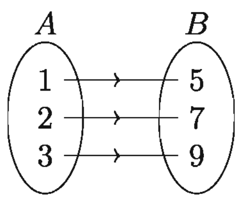
y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই, $f^{-1} : x \to \frac{1}{3}(x-1)$

f^{-1} এর অঙ্কিত রেখা $y = \frac{1}{3}(x-1),\ 1 \leq x \leq 7$ দেখানো হয়েছে।



সার্বিক ফাংশন (Onto Function)

চিত্রে ফাংশন f এর অধীনে সেট $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{5, 7, 9\}$ বিবেচনা করি যেখানে $1 \to 5,\ 2 \to 7$ এবং $3 \to 9$ অর্থাৎ B এর প্রত্যেক উপাদান A সেটের একটি উপাদানের প্রতিবিম্ব। এইরূপ ফাংশনকে **সার্বিক ফাংশন** বলা হয়।



সংজ্ঞা ১১ (সার্বিক ফাংশন). একটি ফাংশন $f : A \to B$ কে **সার্বিক ফাংশন** (onto function) বলা হবে যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি $a \in A$ পাওয়া যায় যেন $f(a) = b$ হয়। অর্থাৎ B = রেঞ্জ f।

২০১৩ **উদাহরণ ৩৪.** যদি $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশন দুইটি $f(x) = x + 5$ এবং $g(x) = x - 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, f এর বিপরীত ফাংশন g।

সমাধান: f ফাংশনটি এক-এক, কেননা

$f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 + 5 = x_2 + 5$ বা, $x_1 = x_2$।

আবার, f ফাংশনটি সার্বিক, কেননা

$y = f(x)$ হলে $x + 5 = y$ বা, $x = y - 5 \in R$।

সুতরাং বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান।

$f^{-1}(x) = y$ হলে $f(y) = x$ বা, $y + 5 = x$ বা, $y = x - 5$

আবার, $f^{-1}(x) = x - 5 = g(x)$

f^{-1} ও g উভয়ের ডোমেন একই হওয়ায় $f^{-1} = g$

কাজ:

ক) নিম্নের প্রতিটি এক-এক ফাংশনের জন্য সংশ্লিষ্ট f^{-1} নির্ণয় কর, যদি বিদ্যমান হয়।
(১) $f(x) = \dfrac{3}{x-1},\ x \neq 1$ (২) $f(x) = \dfrac{2x}{x-2},\ x \neq 2$
(৩) $f : x \rightarrow \dfrac{2x+3}{2x-1},\ x \neq \dfrac{1}{2}$

খ) বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{4x-9}{x-2},\ x \neq 2$ এর ক্ষেত্রে যদি f^{-1} বিদ্যমান হয় তবে
(১) $f^{-1}(-1)$ এবং $f^{-1}(1)$ নির্ণয় কর।
(২) x এর মান নির্ণয় কর যেন $4f^{-1}(x) = x$

গ) বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1},\ x \neq 1$ এর জন্য যদি f^{-1} বিদ্যমান হয় তবে
(১) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর।
(২) $f^{-1}(p) = kp,\ p$ এর সাপেক্ষে k কে প্রকাশ কর।

ঘ) নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত সম্পর্ক F একটি ফাংশন কিনা তা নির্ণয় কর। F ফাংশন হলে উহার ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর, উহা এক-এক কিনা তাও নির্ধারণ কর:
(১) $F = \{(x,y) \in R^2 : y = x\}$ (২) $F = \{(x,y) \in R^2 : y = x^2\}$
(৩) $F = \{(x,y) \in R^2 : y^2 = x\}$ (৪) $F = \{(x,y) \in R^2 : y = \sqrt{x}\}$

ঙ) যদি $f : \{-2,-1,0,1,2\} \rightarrow \{-8,-1,0,1,8\}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।

চ) $f : \{1,2,3,4\} \rightarrow R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন কিন্তু সার্বিক ফাংশন নয়।

অন্বয় ও ফাংশনের লেখচিত্র

লেখচিত্র হলো ফাংশনের জ্যামিতিক উপস্থাপন। $y = f(x)$ লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য O বিন্দুতে পরস্পর ছেদী লম্ব দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' নেওয়া হয়। O কে **মূলবিন্দু**, XOX' কে x **অক্ষ** এবং YOY' কে y **অক্ষ** বলা হয়।

$y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য $a \leq x \leq b$ ব্যবধিতে স্বাধীন চলক x এবং অধীন চলক y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করতে হয়। অত:পর তালিকার সীমিত সংখ্যক বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করতে হয়। প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করলে $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়। নবম-দশম শ্রেণির গণিতে লেখচিত্র সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা প্রদান করা হয়েছে। এখানে, সরলরৈখিক (Linear) ফাংশন, দ্বিঘাত (Quadratic) ফাংশন এবং বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

সরলরৈখিক ফাংশন

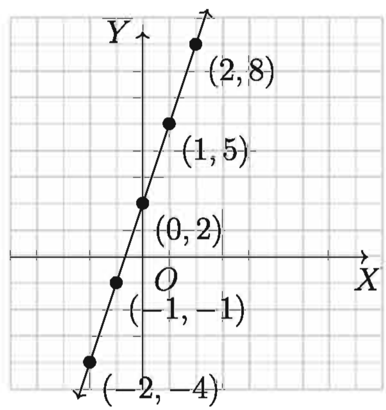
সরলরৈখিক ফাংশন এর সাধারণ রূপ হলো $f(x) = mx + b$ যেখানে, m এবং b বাস্তব সংখ্যা। এর লেখচিত্র একটি রেখা যার ঢাল হলো m এবং y অক্ষের ছেদক b।

এখানে, ধরি $m = 3$ এবং $b = 2$ তাহলে ফাংশনটি দাঁড়ায় $f(x) = 3x + 2$

বর্ণিত ফাংশন হতে x ও y এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8

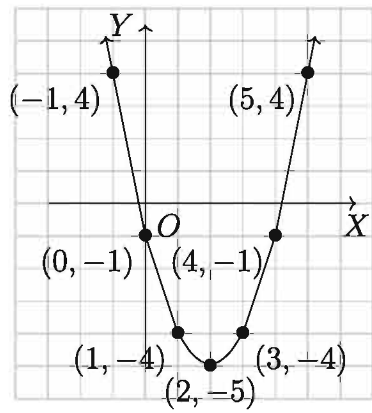
$\therefore$ ফাংশনটির লেখ পাশে দেখানো হলো।



দ্বিঘাত ফাংশন (Quadratic Function)

দ্বিঘাত ফাংশন হলো একটি ফাংশন যা $y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত যেখানে $a,\ b$ ও c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$। প্রদত্ত ফাংশনে ধরি $a = 1,\ b = -4,\ c = -1$। তাহলে $y = ax^2 + bx + c$ কে লেখা যায় $y = x^2 - 4x - 1$। বর্ণিত ফাংশন হতে x ও y এর সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায় যা নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে।

x	$x^2 - 4x - 1$	y
-1	$(-1)^2 - 4(-1) - 1$	4
0	$(0)^2 - 4(0) - 1$	-1
1	$(1)^2 - 4(1) - 1$	-4
2	$(2)^2 - 4(2) - 1$	-5
3	$(3)^2 - 4(3) - 1$	-4
4	$(4)^2 - 4(4) - 1$	-1
5	$(5)^2 - 4(5) - 1$	4



উপরে দ্বিঘাত ফাংশনটির লেখচিত্র। এই দ্বিঘাত ফাংশন এর কিছু সাধারণ বৈশিষ্ট্য লক্ষ করি।

ক) লেখচিত্রটি পরাবৃত্ত আকারের।

খ) লেখচিত্রটির y অক্ষের সমান্তরাল রেখা বা y অক্ষ বরাবর প্রতিসাম্য বিন্দু পাওয়া যাবে।

গ) একটি বিন্দুতে ফাংশনটির মান ক্ষুদ্রতম বা বৃহত্তম হবে।

বৃত্তের লেখচিত্র

উল্লেখ্য যে $p,\ q$ ও r ধ্রুবক এবং $r \neq 0$ হলে R এ $S = \{(x, y) : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2\}$ অন্বয়ের লেখ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ r (নবম-দশম শ্রেণির গণিত দ্রষ্টব্য)। ছক কাগজে (p, q) বিন্দু পাতন করে ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করে লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।

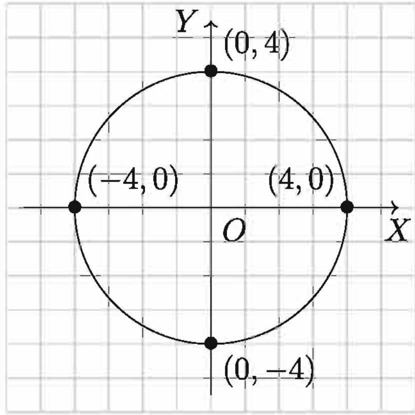
মন্তব্য: যে অন্বয়ের সমাধান সেট অসীম, এর লেখচিত্র অঙ্কনের স্বীকৃত পদ্ধতি হলো যথেষ্ট সংখ্যক সমাধানের প্রতিরূপী বিন্দু ছক কাগজে পাতন করে সাবলীলভাবে ঐ সব বিন্দু যোগ করা, যাতে অন্বয়টির লেখচিত্রের ধরন দ্ব্যর্থহীনভাবে বুঝা যায়। কিন্তু যে অন্বয়ের লেখচিত্র বৃত্ত, এর জন্য কম্পাস ব্যবহার করলে কাজ সহজ ও সুন্দর হয় বিধায় শেষোক্ত পদ্ধতি অবলম্বন করা হলো।

উদাহরণ ৩৫. $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 16\}$

সুতরাং S এর লেখচিত্র একটি বৃত্ত, $x^2 + y^2 = 4^2$ যার কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = 4$।

S এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হলো:

২০২১



কাজ:

ক) নিম্নের প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণ থেকে y কে x এর ফাংশন রূপে প্রকাশ কর।

(১) $y-2=3(x-5)$ (২) $y-5=-2(x+1)$

(৩) $y-2=\frac{1}{2}(x+3)$ (৪) $y-5=\frac{4}{3}(x-3)$

খ) লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(১) $y=3x-1$ (২) $x+y=3$

(৩) $x^2+y^2=9$ (৪) $y=\frac{1}{3}x+1$

উদাহরণ ৩৬. দেওয়া আছে $f:x\to\frac{2x-1}{2x+3}$।

ক) $f\left(-\frac{1}{3}\right)=$ কত?

খ) ফাংশনটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর।

গ) $2f^{-1}(x)=x$ হলে x এর মান নির্ধারণ কর।

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $f:x\to\frac{2x-1}{2x+3}$। সুতরাং $f(x)=\frac{2x-1}{2x+3}$।

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)-1}{2\left(-\frac{1}{3}\right)+3}=\frac{-\frac{2}{3}-1}{-\frac{2}{3}+3}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{7}=-\frac{5}{7}$$

খ) দেওয়া আছে, $f:x\to\frac{2x-1}{2x+3}$। সুতরাং $f(x)=\frac{2x-1}{2x+3}$।

এখানে $2x+3=0$ হলে অর্থাৎ $x=-\dfrac{3}{2}$ হলে, ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore\ x\neq-\dfrac{3}{2}$, সুতরাং ডোম $f=R\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$।

ধরি, $x_1\in$ ডোম f এবং $x_2\in$ ডোম f

$\therefore f(x_1)=\dfrac{2x_1-1}{2x_1+3}$ এবং $f(x_2)=\dfrac{2x_2-1}{2x_2+3}$

এখন $f(x_1)=f(x_2)$ হবে, যদি ও কেবল যদি

$\dfrac{2x_1-1}{2x_1+3}=\dfrac{2x_2-1}{2x_2+3}$ বা, $\dfrac{2x_1-1}{2x_1+3}-1=\dfrac{2x_2-1}{2x_2+3}-1$

বা, $\dfrac{2x_1-1-2x_1-3}{2x_1+3}=\dfrac{2x_2-1-2x_2-3}{2x_2+3}$

বা, $\dfrac{-4}{2x_1+3}=\dfrac{-4}{2x_2+3}$ বা, $2x_1+3=2x_2+3$

বা, $2x_1=2x_2$ বা $x_1=x_2$ হয়।

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

গ) দেওয়া আছে, $f:x\to\dfrac{2x-1}{2x+3}$, সুতরাং $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+3}$

ধরি, $f(x)=y\ \therefore x=f^{-1}(y)$

এখন, $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+3}$ বা, $y=\dfrac{2x-1}{2x+3}$

বা, $2xy+3y=2x-1$ বা, $2xy-2x=-3y-1$

বা, $-2x(1-y)=-(1+3y)$

বা, $x=\dfrac{1+3y}{2(1-y)}$

বা, $f^{-1}(y)=\dfrac{1+3y}{2(1-y)}$ $[\because x=f^{-1}(y)]$

বা, $f^{-1}(x)=\dfrac{1+3x}{2(1-x)}$ [চলক পরিবর্তন করে]

বা, $2f^{-1}(x)=\dfrac{1+3x}{1-x}$

বা, $x=\dfrac{1+3x}{1-x}$ $[\because 2f^{-1}(x)=x]$

বা, $1+3x=x-x^2$ বা, $x^2+3x-x+1=0$ ২০১৫

বা, $x^2+2x+1=0$ বা, $(x+1)^2=0$

বা, $x+1=0$ বা, $x=-1$

$\therefore$ নির্ণয় মান $x=-1$

অনুশীলনী ১.২

১. $\{(2,2),(4,2),(2,10),(7,7)\}$ অন্বয়ের ডোমেন কোনটি?

ক) $\{2,4,5,7\}$ খ) $\{2,2,10,7\}$

গ) $\{2,4,10,7\}$ ঘ) $\{2,4,7\}$

২. $S=\{(x,y): x\in A,\ y\in A$ এবং $y=x^2\}$ এবং $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ নিচের কোনটি S অন্বয়ের সদস্য?

ক) $(2,4)$ খ) $(-2,4)$

গ) $(-1,1)$ ঘ) $(1,-1)$

৩. যদি $S=\{(1,4),(2,1),(3,0),(4,1),(5,4)\}$ হয় তবে,

(i) S অন্বয়ের রেঞ্জ $\{4,1,0\}$

(ii) S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়, $S^{-1}=\{(4,1),(1,2),(0,3),(1,4),(4,5)\}$

(iii) S অন্বয়টি একটি ফাংশন

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

৪. যদি $F(x)=\sqrt{x-1}$ হয় তবে $F(10)$ = কত?

ক) 9 খ) 3 গ) -3 ঘ) $\sqrt{10}$

৫. $S=\{(x,y): x^2+y^2-25=0$ এবং $x\geq 0\}$ হলে,

(i) অন্বয়টি ফাংশন নয়।

(ii) অন্বয়টির লেখচিত্র একটি অর্ধবৃত্ত।

(iii) অন্বয়টির লেখচিত্র x অক্ষের উপর অর্ধতলে থাকবে।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

৬. $F(x)=\sqrt{x-1}=5$ হলে x এর মান কত?

ক) 5 খ) 24 গ) 25 ঘ) 26

৭. $F(x)=\sqrt{x-1}$ ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি?

ক) ডোম $F=\{x\in R: x\neq 1\}$ খ) ডোম $F=\{x\in R: x\geq 1\}$

গ) ডোম $F=\{x\in R: x\leq 1\}$ ঘ) ডোম $F=\{x\in R: x>1\}$

৮. (i) নিচে প্রদত্ত S অন্বয়গুলোর ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর।

(ii) S অথবা S^{-1} অন্বয়গুলো ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।

(iii) ফাংশনগুলো এক-এক কিনা নির্ধারণ কর।

ক) $S = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20)\}$

খ) $S = \{(-3,8), (-2,3), (-1,0), (0,-1), (1,0), (2,3), (3,8)\}$

গ) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,1), (1,-1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

ঘ) $S = \{(-3,-3), (-1,-1), (0,0), (1,1), (3,3)\}$

ঙ) $S = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$

৯. $F(x) = \sqrt{x-1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

ক) $F(1), F(5)$ এবং $F(10)$ নির্ণয় কর।

খ) $F(a^2+1)$ নির্ণয় কর যেখানে $a \in R$।

গ) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর।

ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \geq 0$।

১০. $F : R \to R,\ F(x) = x^3$ ফাংশনের জন্য

ক) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন।

গ) F^{-1} নির্ণয় কর।

ঘ) দেখাও যে, F^{-1} একটি ফাংশন।

১১. ক) $f : R \to R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = ax + b; a, b \in R$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।

খ) $f : [0,1] \to [0,1]$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।

১২. ক) যদি $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x^3+5$ এবং $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, $g = f^{-1}$।

খ) যদি $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = 5x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে, $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

১৩. S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর।

ক) $S = \{(x,y) : 2x - y + 5 = 0\}$

খ) $S = \{(x,y) : x + y = 1\}$

গ) $S = \{(x,y) : 3x + y = 4\}$

ঘ) $S = \{(x,y) : x = -2\}$

১৪. S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর।

ক) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$ খ) $S = \{(x, y) : x^2 + y = 9\}$

১৫. দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$।

ক) $F(x+1)$ এবং $F\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা তা যাচাই কর, যখন $x, y \in R$।

গ) $F(x) = y$ হলে x এর তিনটি পূর্ণ সাংখ্যিক মানের জন্য y এর মান নির্ণয় কর এবং $y = 2x - 1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

১৬. $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশন দুইটি যথাক্রমে $f(x) = 3x+3$ এবং $g(x) = \frac{x-3}{3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

ক) $g^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $f(x)$ সার্বিক ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।

গ) দেখাও যে, $g = f^{-1}$।

১৭. দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-4}$।

ক) $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

খ) $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

গ) $f^{-1}(x)$ ফাংশন কিনা তা লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

২০১৫